Espace tangent et théorème des extrema liés

Leçons : 159, 214, 215, 267

Réf. : Avez, Calcul différentiel

Th ① : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ (ou $\mathcal{C}^k$...) et de dimension d. Soit $a \in M$. On a alors :

i) carte locale : $T_a M = d\varphi(a)^{-1}\left(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}\right)$

ii) fonction implicite : $T_a M = \operatorname{Ker} dg(a)$

Th. ② : $M \subset \mathbb{R}^n$ SV de classe $\mathcal{C}^1$. Soit V voisinage ouvert de M et $f : V \to \mathbb{R}$ de classe. Si f admet un extremum local en $a \in M$, alors $T_a M \subset \operatorname{Ker} df(a)$

Lemme ③ : $E = \mathbb{R}^n$. Soit $1 \leq q \leq n$, $L, L_1 \dots L_q \in E^*$ telles que $L_1 \dots L_q$ sont linéairement indépendantes et $\bigcap_{i=1}^{q} L_i \subset L$. Alors, il existe $\lambda_1 \dots \lambda_q \in \mathbb{R}$ tels que $L = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i L_i$

Th. ④ : (extrema liés)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f, g_1 \dots g_q : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\Sigma = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_q(x) = 0\}$.

On suppose que f admet un extremum local en $a \in \Sigma$ tel que $dg_1(a), \dots, dg_q(a)$ sont linéairement indépendantes.

Alors, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ tels que $df(a) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, dg_i(a)$

Th. 1 :

1) Démonstration de i) : $a \in M$. $\exists\, U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de a, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$ difféo de U sur $\varphi(U)$ tq $\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}]$

Rappel : $T_a M = \{ v \in \mathbb{R}^n \;/\; \exists\, I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert contenant 0, $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v \}$.

On va m.q. $T_a M = d\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\})$ par double inclusion

a/ $\subset$

Soit $v \in T_a M$, $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ / $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

- Quitte à réduire I, OPS que $\gamma(I) \subset M \cap U$.

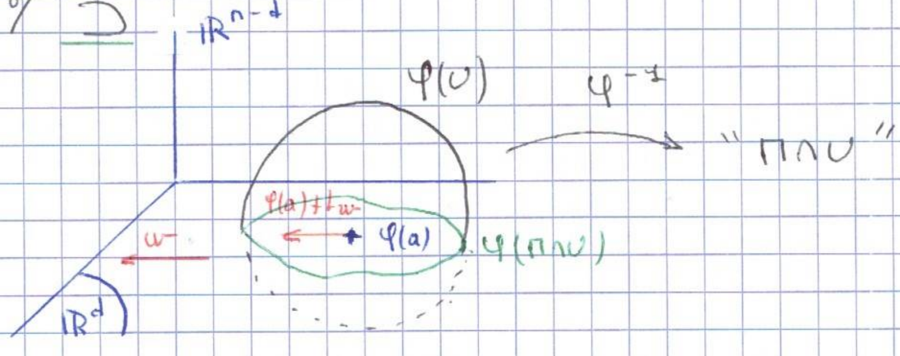
- On a alors : $\forall t \in I$, $\varphi \circ \gamma(t) \in \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}] \subset \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}$

donc $(\varphi \circ \gamma)'(t) \in \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}$.

donc $(\varphi \circ \gamma)'(0) = d\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = d\varphi(a)(v) \in \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}$

donc $T_a M \subset d\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\})$

b/ $\supset$



- Soit $w \in \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}$. φ est un $\mathcal{C}^1$ difféo donc $\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}]$ est un ouvert.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varphi(a) + tw \in \varphi(M \cap U)$

- On pose alors $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \cap U$
$t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(a) + tw)$

γ est alors bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) \in T_a M$

- Enfin, $\varphi \circ \gamma(t) = \varphi(a) + t\,w \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

  donc $(\varphi \circ \gamma)'(t) = w$

  d'où $(\varphi \circ \gamma)'(0) = d\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = \boxed{d\varphi(a)(\gamma'(0)) = w}$

  On a bien $\boxed{d\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}) \subset T_a M}$

2) Démonstration de ii) : $a \in M$, $\exists\, U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de a, $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^1$ t.q. $dg(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-d})$ soit surjective et

$$M \cap U = \{x \in U \,/\, g(x) = 0\}$$

a°/ Mq $T_a M \subset \operatorname{Ker} dg(a)$

Soit $v \in T_a M$, $\gamma : I \to M \cap U \,/\, \gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

$\forall t \in I$, $\gamma(t) \in M \cap U$ donc $g \circ \gamma(t) = 0$

donc $(g \circ \gamma)'(0) = dg(a)(v) = 0$

donc $\boxed{T_a M \subset \operatorname{Ker} dg(a)}$

b°/ Conclure par dimension

- On a montré au 1) que $T_a M = d\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\})$ et $d\varphi(a) \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $\dim T_a M = d$

- $dg(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-d})$ est surjective donc $\dim \operatorname{Ker} dg(a) = n - (n-d) = d$

On a donc bien $\boxed{T_a M = \operatorname{Ker} dg(a)}$

Th. (2) :

Soit $v \in T_a M$, $\gamma : I \to M$ $\mathcal{C}^1$ / $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Alors $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en 0

donc $(f \circ \gamma)'(0) = df(a)(v) = 0$

donc $\boxed{T_a M \subset \mathrm{Ker}\, df(a)}$

Lemme (3) :

On complète $(L_1 \dots L_q)$ en $(L_1 \dots L_q, L_{q+1} \dots L_n)$ base de E^*.

- On note $(e_1 \dots e_n)$ sa base antiduale. On a alors

$$\underbrace{\bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}\, L_i}_{= \mathrm{Vect}(L_1 \dots L_q)^\circ \,\subset} = \mathrm{Vect}(e_{q+1}, \dots, e_n)$$

$\downarrow$ + même dimension $n-q$

- $L \in E^*$ donc : $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ / $L = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

Soit $q+1 \leq j \leq n$. On a alors $f(e_j) = 0 = \lambda_j \times 1$

donc $\boxed{L = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i L_i}$

Th. (4) :

- Soit $G : U \to \mathbb{R}^q$

$x \mapsto (g_1(x) \dots g_q(x))$

Alors : . G est de classe $\mathcal{C}^1$

. $\Sigma = \{x \in U \,/\, G(x) = 0\}$

. $dG(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ est de rang q donc admet un mineur d'ordre q non nul, donc par continuité du déterminant, il existe U_a voisinage ouvert de a dans U tel que $\Sigma \cap U_a$ soit une SV de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de dimension $n-q$. ($dG(a)$ reste surjective sur U_a)

A

G

. D'après le Th. 2, on a donc $\boxed{\operatorname{Ker} dG(a) \subset \operatorname{Ker} df(a)}$

. Enfin, $\operatorname{Ker} dG(a) = \bigcap_{i=1}^{q} \operatorname{Ker} dg_i(a)$ donc par le lemme 3,

$$\boxed{\text{il existe } \lambda_1 \dots \lambda_q \in \mathbb{R} \text{ tels que } df(a) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, dg_i(a)}$$